



**Universidad de Antioquia**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Instituto de Matemáticas

**Matemáticas Básicas**

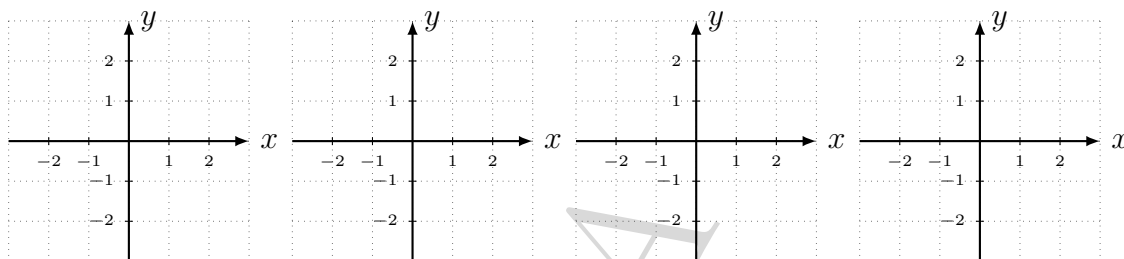
Taller 6

Medellín, 20 de noviembre de 2014

Esta obra es distribuida bajo una licencia [Creative Commons Atribución - No comercial 2.5 Colombia](#).

1. Dibuje la región indicada sobre el plano cartesiano de los puntos  $(x, y)$  tales que:

- a)  $x < 0$       b)  $xy < 0$       c)  $|x| \leq 2$       d)  $x \geq 1$  y  $y < 3$



2. En los problemas siguientes, halle la ecuación de la recta determinada por la información que se da en cada numeral (y gráfiquela). Siempre que sea posible escriba la ecuación obtenida en la forma  $y = mx + b$ , cuando no sea posible explique porqué.

- a) Pasa por  $P(\frac{1}{2}, 1)$  y es perpendicular a la recta dada por  $8y - 7x = 16$ . (Dos rectas son perpendiculares si el producto de sus pendientes es  $-1$ ).
- b) Es paralela a  $2y - 3x = 14$  y corta el eje  $y$  en  $-1$ . (Dos rectas son paralelas si las pendientes son iguales).
- c) Pasa por  $P(\frac{3}{2}, 4)$  y  $Q(-6, -1)$ .
- d) Pasa por el punto de intersección de las rectas:  $y = \frac{x}{2} - 3$  y  $y = 3x - 6$ . Tiene pendiente  $m = -\frac{3}{2}$ .
- e) Corta el eje  $y$  en  $1$  y pasa por  $P(-3, 4)$ .
- f) Pasa por el punto medio del segmento que une los puntos:  $P(-1, -2)$  y  $Q(3, 5)$ . Tiene pendiente  $m = -\frac{1}{2}$ .
- g) Pasa por los puntos  $P(-1, \frac{1}{5})$  y  $Q(\sqrt{2}, \frac{1}{5})$ .

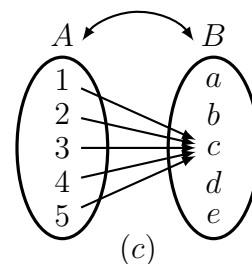
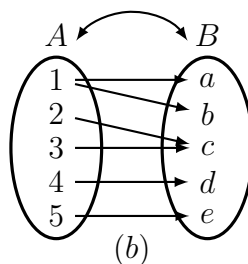
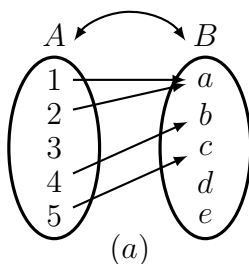
3. Encuentre la distancia  $d(A, B)$  entre los puntos  $A$  y  $B$  y el punto medio del segmento  $AB$  si  $A = (4, -3)$  y  $B = (3/2, -6)$

4. Demuestre que  $A(-4, 2)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(3, -1)$  y  $D(-2, -3)$  son vértices de un cuadrado.

5. Demuestre que  $A(-4, -1)$ ,  $B(0, -2)$ ,  $C(6, 1)$  y  $D(2, 2)$  son vértices de un paralelogramo.

6. Dado  $A(-3, 8)$  encuentre las coordenadas del punto  $B$  tal que  $C(5, -10)$  sea el punto medio del segmento  $AB$

7. Muestre que  $C(3, -6)$  está sobre la mediatriz del segmento  $AB$  si  $A(-4, -3)$  y  $B(6, 1)$
8. Si la ecuación de una circunferencia con centro en el punto  $(h, k)$  y radio  $r$  viene dada por:  $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ , entonces grafique:
  - a)  $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 9$  b)  $(x + 3)^2 + y^2 = 16$  c)  $x = \sqrt{9 - y^2}$
9. Completando cuadrados, encuentra el centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es:  
 $3x^2 + 3y^2 - 12x + 18y = 9$ .
10. ¿Cuál es el valor de  $a$  para el cual el radio de la circunferencia  $x^2 + y^2 + ax + 2y + 9 = 0$  es 1?
11. Determine la ecuación de la circunferencia en la que uno de sus diámetros es el segmento de extremos  $P_1(-1, -3)$  y  $P_2(3, 2)$ . (grafíquela)
12. Encuentre la ecuación de la circunferencia que satisfaga las condiciones dadas.
  - a) Centro  $C(3/4, -2/3)$ , radio  $3\sqrt{2}$
  - b) Centro  $C(-3, 6)$  y tangente al eje  $y$
  - c) Tangente a ambos ejes, centro en el segundo cuadrante, radio 2
13. Encuentre el centro y radio de las circunferencias dadas
  - a)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 36 = 0$  b)  $x^2 + y^2 + 4y - 7 = 0$
14. Indica cuáles de las siguientes asociaciones corresponden a una función de  $A$  en  $B$  y en caso de que sea función, indicar su dominio y rango. Justifica tu respuesta.



15. Si  $a$  y  $h$  son números reales, encuentre

$$f(a + h), \quad \frac{1}{f(a)}, \quad f\left(\frac{1}{a}\right), \quad \frac{f(a + h) - f(a)}{h} \text{ si } h \neq 0,$$

para cada una de las siguientes funciones:

a)  $f(x) = -x^2 + 3$       b)  $f(x) = 4x^2$       c)  $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

16. Hallar el dominio y el rango de las funciones

a)  $f(x) = \sqrt{x-8}$       e)  $t(x) = \sqrt{1-x^2}$       i)  $r(x) = \sqrt{2x+7}$   
 b)  $g(x) = \sqrt{x^2-9}$       f)  $m(x) = \frac{1}{x}$       j)  $w(x) = \frac{x+1}{x^3-9x}$   
 c)  $h(x) = x^2+6$       g)  $b(x) = \sqrt{4-x}$   
 d)  $i(x) = \frac{2x}{x^2-4}$       h)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^4-16}{x^2-4}}$       k)  $k(x) = \frac{\sqrt{2x-5}}{x^2-5x+4}$

17. Realice la gráfica de cada una de las siguientes funciones, determine cuáles son funciones constantes y cuáles son funciones lineales.

a)  $f(x) = 5$       c)  $y = 4$       e)  $g(x) = x$   
 b)  $h(x) = 3x - 1$       d)  $x = 6$       f)  $m(x) = 5 - x$

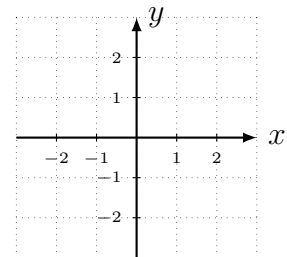
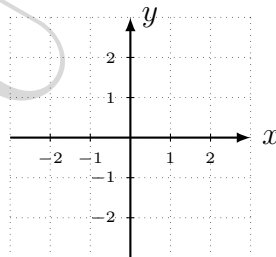
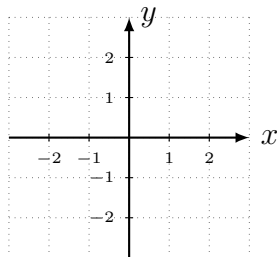
18. Grafique las siguientes funciones:

a) *valor absoluto:*      b) *función escalón*      c) *función signo*

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0, \\ -x & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$$

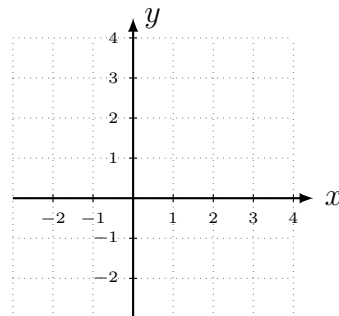
$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0, \\ 0 & \text{si } x = 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$



19. Considere la función

$$n(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ -1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

Halle  $n(15)$ ,  $n(-2)$ ,  $n(-1)$ , y  $n(0)$ .  
 Grafique la función.



20. Trace la gráfica de la ecuación y marque las intersecciones con los ejes  $x$  y  $y$ .

a)  $y = -x + 2$       b)  $y = 2x^2 - 1$       c)  $y = x^3 - 8$       d)  $y = \sqrt{x - 4}$

21. Una función  $f$  es *par* si los números reales  $x$  y  $-x$  están en su dominio y si además  $f(x) = f(-x)$ . Una función  $f$  es *impar* si los números reales  $x$  y  $-x$  están en su dominio y si además  $f(-x) = -f(x)$ . Determine si  $f$  es par, impar o ninguna de éstas.

a)  $f(x) = x$       f)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$   
 b)  $f(x) = 1/x$       g)  $f(x) = 5x^3 + 2x$   
 c)  $f(x) = x^2$       h)  $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x}$   
 d)  $f(x) = x^3$       i)  $f(x) = x^3 - \frac{1}{x}$   
 e)  $f(x) = \sqrt{x}$

22. Encuentre  $(f + g)(x)$ ,  $(fg)(x)$  y  $(f/g)(x)$  y especifique en cada caso el dominio, si:

a)  $f(x) = \sqrt{x + 5}$  y  $g(x) = x^2 - 4$       b)  $f(x) = \frac{2x}{x - 4}$  y  $g(x) = \frac{x}{x + 5}$

23. Expresé  $h(x)$  como composición de dos funciones.

a)  $h(x) = \frac{4}{\sqrt[4]{x^3 + 3}}$       b)  $h(x) = \sqrt{|x| + 5}$       c)  $h(x) = \left(\frac{1}{x - 2}\right)^3$

24. Para las funciones  $f$  y  $g$ , dadas a continuación, encuentre  $(f \circ g)(x)$  y  $(g \circ f)(x)$ , especificando en cada caso su dominio. Además, calcule  $(f(g(-2)))$ :

a)  $f(x) = 2x - 5$  y  $g(x) = 3x + 4$   
 b)  $f(x) = \sqrt{x - 2}$  y  $g(x) = \sqrt{x + 5}$   
 c)  $f(x) = \sqrt{3 - x}$  y  $g(x) = \sqrt{x^2 - 16}$   
 d)  $f(x) = \frac{1}{x - 1}$  y  $g(x) = x - 1$   
 e)  $f(x) = \frac{x - 1}{x - 2}$  y  $g(x) = \frac{x - 3}{x - 4}$

25. Grafica la función *mayor entero* de  $x$  (denotada por  $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ) y definida por  $f(x) = \lfloor x \rfloor = n$  donde  $n \in \mathbb{Z}$  es el mayor entero que satisface  $n \leq x < n + 1$ .

a) Grafica la función  $G(x) = \lfloor x \rfloor - x$   
 b) Grafica la función  $H(x) = \lfloor x - 4 \rfloor$   
 c) Trazar la gráfica de  $f(x) = |x^2 - 1|$

26. Expresé el área de un cuadrado en función de:

a) su lado

b) su diagonal

c) su perímetro

27. Encuentra la gráfica que corresponde a cada una de las siguientes funciones:

■  $f(x) = |x - 2|$

■  $f(x) = -2|x|$

■  $f(x) = -|x + 2| + 3$

■  $f(x) = |x|$

■  $f(x) = (x - 2)^3 + 1$

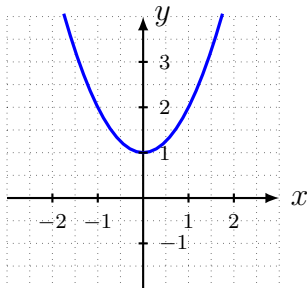
■  $f(x) = x^2 + 1$

■  $f(x) = \sqrt{x + 2}$

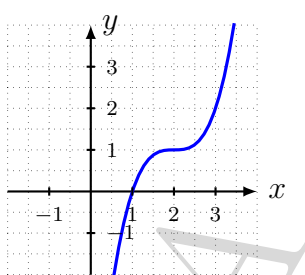
■  $f(x) = -2x^2$

■  $f(x) = -x^2 + 3$

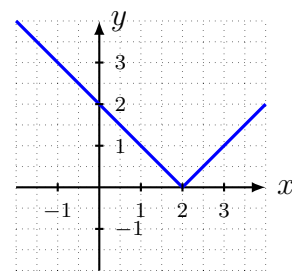
a)  $f(x) =$



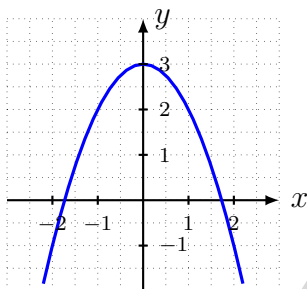
d)  $f(x) =$



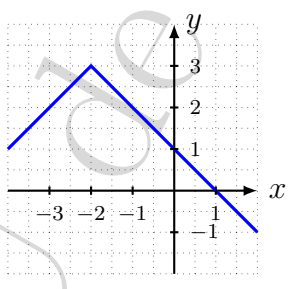
g)  $f(x) =$



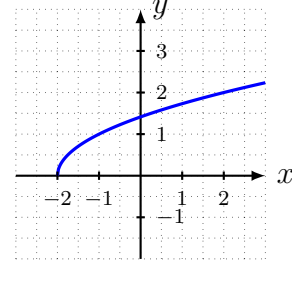
b)  $f(x) =$



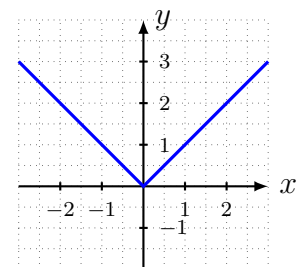
e)  $f(x) =$



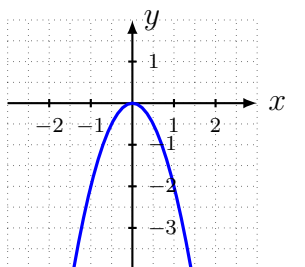
h)  $f(x) =$



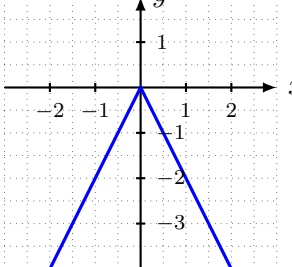
c)  $f(x) =$



f)  $f(x) =$



i)  $f(x) =$



28. Una compañía productora de cereal fabrica cajas para empackar su producto. Por razones estéticas, la caja debe tener las siguientes proporciones: Su amplitud es tres veces su profundidad y su altura es cinco veces su profundidad

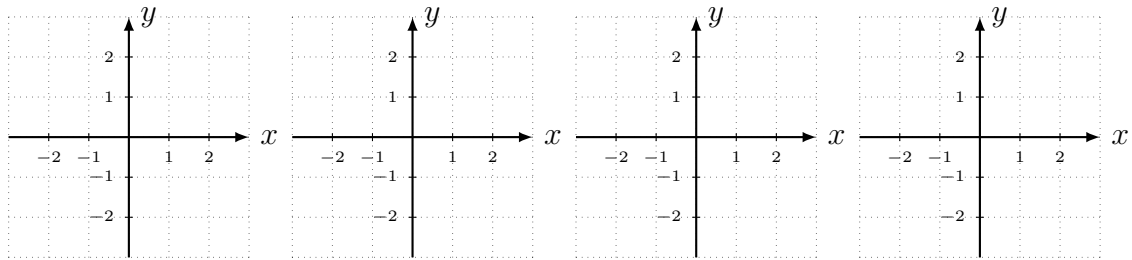
a) Halle una función que modele el volumen de caja en términos de su profundidad.

b) Encuentre el volumen de la caja si su profundidad es 1.5 pulgadas.

c) Para que profundidad el volumen es  $90 \text{ pulg}^3$

29. Una encuesta de ahorro gana 5 % de interés compuesto anualmente. Si invierte  $x$  dólares en tal cuenta, luego la cantidad  $A(x)$  de la inversión después de un año es la inversión inicial más 5 %.
- a) Hallar la función que modela el problema.      d)  $A \circ A \circ A \circ A$   
 b) Encuentre  $A \circ A$       e) ¿Qué representan estas composiciones?  
 c)  $A \circ A \circ A$       f) Encuentre una fórmula para lo que obtiene cuando compone  $n$  copias de  $A$ .
30. Un barco está viajando a 20 mi/h paralela a una ribera recta. El barco está a 5 millas de la orilla. Pasa un faro a mediodía.
- a) Expresar la distancia  $s$  entre el faro y el barco como una función de  $d$ , la distancia que ha recorrido el barco desde mediodía; es decir, encuentre  $f$  de modo que  $s = f(d)$   
 b) Expresar a  $d$  como una función de  $t$ , el tiempo transcurrido desde mediodía; es decir, encuentre  $g$  tal que  $d = g(t)$ .  
 c) Hallar  $f \circ g$ . ¿Qué representa esta función?
31. Si  $f(x) = x - 3$ ,  $g(x) = \sqrt{x}$ , y  $h(x) = x^3$ . Halle:
- a)  $h \circ (g(f(x)))$       b)  $f(h(g(x)))$       c)  $(f \circ g \circ h)(\sqrt{3})$
32. En los siguientes problemas verifique si  $f$  y  $g$  son inversas una de la otra. (es decir,  $f(g(x)) = x$  y  $g(f(x)) = x$ ):
- a)  $f(x) = 4x - 28$ ,  $g(x) = \frac{x}{4} + 7$       d)  $f(x) = x^3 - \pi$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x + \pi}$   
 b)  $f(x) = x^3 - \pi$ ,  $g(x) = \sqrt[3]{x + \pi}$       e)  $f(x) = \frac{3x + 5}{1 - 2x}$ ,  $g(x) = \frac{x - 5}{2x + 3}$   
 c)  $f(x) = \frac{3x + 5}{1 - 2x}$ ,  $g(x) = \frac{x - 5}{2x + 3}$
33. Para convertir  $x$  grados Celsius en  $y$  grados Fahrenheit, se usa la fórmula  $y = \frac{9}{5}x + 32$ . Encuentre la fórmula para convertir  $x$  grados Fahrenheit en  $y$  grados Celsius.
34. En los siguientes ejercicios, encuentre la inversa  $f^{-1}$ , de la función  $f$ . Establezca el dominio y el rango de cada función y gráfíquelas en el plano cartesiano.
- a)  $f(x) = 2 - 3x$       d)  $f(x) = \frac{x^2 - 4}{2x^2}$ ,  $x > 0$   
 b)  $f(x) = \frac{1}{x - 2}$   
 c)  $f(x) = x^2 + 2$ ,  $x \geq 0$       e)  $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ , para  $0 \leq x \leq r$
35. Encuentre la función inversa de  $f$ ; establezca su dominio y rango, y gráfíquela.

a)  $f(x) = 2 - 3x$     b)  $f(x) = x^2 + 2, x \geq 0$     c)  $f(x) = \frac{1}{x-2}$     d)  $f(x) = \frac{x^2-4}{2x^2}, x > 0$



36. Utiliza la gráfica de  $f(x) = x^2$  para obtener la gráfica de:

a)  $g(x) = x^2 + 3.$     c)  $g(x) = (x - 2)^2.$     e)  $g(x) = (x + 2)^2 - 3.$   
 b)  $g(x) = x^2 - 4.$     d)  $g(x) = (x + 4)^2.$

37. Utiliza la gráfica de  $f(x) = |x|$  para obtener la gráfica de:

a)  $g(x) = 2|x|.$     b)  $g(x) = \frac{1}{2}|x|.$

38. Considere  $f(x) = \sqrt{x - 2}$

a) Utilice la gráfica de  $f$  para bosquejar la gráfica de  $f^{-1}$     b)  $f^{-1}(x) = ?$

39. Halle, si es posible, la inversa de cada una de las siguientes funciones.

a)  $f(x) = \sqrt{x + 10}$     c)  $h(x) = x^4 + 6$     e)  $m(x) = \frac{1}{x^3}$   
 b)  $g(x) = \sqrt{x^3 - 9}$     d)  $g(x) = \frac{x}{4x^2 + 4}$     f)  $f(x) = \sqrt{\frac{x^4 - 36}{x^2 - 6}}$

40. Por sus servicios, un investigador privado requiere una cuota de retención de \$500 más \$80 por hora. Sea  $x$  el número de horas que el investigador pasa trabajando en un caso.

- a) Halle una función  $f$  que modela la cuota del investigador como una función de  $x$   
 b) Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa  $f^{-1}$ ?  
 c) Encuentre  $f^{-1}(1220)$ . ¿Qué representa su respuesta?

41. La cantidad vendida de un artículo se llama *demanda* del artículo. La demanda para cierto artículo es una función del precio dada por:

$$D(p) = -3p + 150$$

- a) Encuentre  $D^{-1}$ . ¿Qué representa  $D^{-1}$ ?  
 b) Determine  $D^{-1}(30)$  ¿Qué representa su respuesta?

42. Marzello's pizza fijó como precio base de la pizza grande \$7 más \$2 por cada ingrediente. Por tanto si usted ordena una pizza grande con  $x$  ingredientes, el precio lo dará la función  $f(x) = 7 + 2x$ . Encuentre  $f^{-1}$ . ¿Qué representa la función  $f^{-1}$ ?
43. Un vendedor de automóviles anuncia un descuento del 15 % en todos sus autos nuevos. Además el fabricante ofrece una rebaja de \$1000 en la compra de automóviles nuevo. Sea  $x$  el precio de venta del automóvil.
- a) Suponga que sólo se aplica el 15 % de descuento. Encuentre una función  $f$  que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta  $x$
  - b) Suponga que sólo se aplica una rebaja de \$1000. Encuentre una función  $g$  que modele el precio de compra del automóvil como una función del precio de etiqueta  $x$
  - c) Encuentre una fórmula para  $H = f \circ g$
  - d) Encuentre  $H^{-1}$ . ¿Qué representa  $H^{-1}$ ?
  - e) Determine  $H^{-1}(13000)$   
¿Qué representa su respuesta?
44. Suponga que se da la gráfica de la función  $f$ . Describa como se puede obtener las gráficas de las siguientes funciones a partir de  $f$ .
- a)  $y = f(x) + 8$
  - c)  $y = f(-x)$
  - e)  $y = f(8x)$
  - g)  $y = f(x - 2) - 2$
  - b)  $y = 1 + 2f(x)$
  - d)  $y = -f(x)$
  - f)  $y = -f(-x)$
  - h)  $y = f^{-1}$